Algoritmi e Strutture Dati

Elementi di Programmazione Dinamica

Maria Rita Di Berardini, Emanuela Merelli[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Camerino

A.A. 2007/08

Parte I

Elementi di programmazione dinamica

Elementi di programmazione dinamica

Abbiamo visto come è possibile applicare la tecnica di PD per risolvere il problema della moltiplicazione di una sequenza di matrici (algoritmo **MatrixChainOrder**)

Ma, da un punto di vista ingegneristico, quando dovremmo cercare di risolvere un problema con la PD?

Cerchiamo di rispondere a questa domanda esaminando i due ingredienti chiave che deve avere un problema di ottimizzazione affinchè possa essere applicata la PD: la **sottostruttura ottima** e i **sottoproblemi ripetitivi**

Elementi di programmazione dinamica

sottostruttura ottima:

- un problema presenta una sottostruttura ottima se una soluzione ottima del problema contiene al suo interno le soluzioni ottime dei sottoproblemi
- quando un problema presenta una sottostruttura ottima, allora è possibile costruire una soluzione ottima del problema combinando soluzioni ottime di sottoproblemi
- ciò potrebbe essere un buon indizio dell'applicabilità della PD (ma potrebbe anche indicare che è possibile applicare una strategia golosa)

Elementi di programmazione dinamica

sottoproblemi ripetuti:

- lo spazio dei sottoproblemi da risolvere deve essere "**piccolo**" e la soluzione deve essere costruita risolvendo ripetutamente gli stessi sottoproblemi (senza generarne sempre di nuovi)
- Questo più l'uso di una tabella per memorizzare soluzioni parziali consente di ridurre il tempo di esecuzione
- obiettivo: scrivere un algoritmo che possa essere eseguito in un tempo polinomiale

Sottostruttura Ottima

Per scoprire la sottostruttura ottima si segue il seguente schema:

1. si suppone di conoscere la scelta che porta ad una soluzione ottima. **NB**: in questa fase non interessa sapere come tale scelta sia stata determinata; ci limitiamo a supporre di conoscerla

   assumiamo che la parentesizzazione ottima di $A_i \cdots A_j$ suddivida il prodotto fra A_k e A_{k+1}

2. determiniamo quali sottoproblemi considerare e come caratterizzare lo spazio risultante dei sottoproblemi.

   se k – con $i \leq k < j$ – caratterizza la soluzione ottima, risolviamo i due sottoproblemi $A_i \cdots A_k$ e $A_{k+1} \cdots A_j$

3. dimostrare, utilizzando la tecnica "taglia e incolla", che le soluzioni dei sottoproblemi utilizzati all'interno della soluzione ottima sono a loro volta ottime

Sottostruttura Ottima

La sottostruttura ottima varia nei domini dei problemi in due modi

1. per il numero di sottoproblemi utilizzati all'interno di una soluzione ottima
   la suddivisione ottima del prodotto $A_{i\ldots j}$ contiene due sottoproblemi

2. per il numero di possibili scelte per determinare quale sottoproblema (o quali sottoproblemi) utilizzare in una soluzione ottima.
   l'indice k che determina la suddivisione ottima, varia nell'intervallo $i \leq k < j$ e può essere scelto fra $j - i$ canditati

Calcolo del valore della soluzione ottima

Una volta verificata la sottostruttura ottima del problema:

1. si identifica il numero di sottoproblemi da risolvere

   risolvere il problema del prodotto di una sequenza di matrici, significa risolvere un numero di sottoproblemi dell'ordine di $O(n^2)$. Perchè?

   Possibili sottoproblemi: tutti quelli della forma $A_{i\ldots j}$ con $i = 1, \ldots n$ e $j = i, \ldots n$. Fissato i dobbiamo risolvere $n - i + 1$ sottoproblemi. In totale

$$\sum_{i=1}^{n} n - i + 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

2. se tale numero è "ragionevole", forniamo una soluzione ricorsiva che calcola il valore della soluzione ottima

   definiamo ricorsivamente il costo del prodotto $A_{i\ldots j}$ tramite la funzione $m[i, j]$

Calcolo del valore della soluzione ottima

3. la soluzione ricorsiva viene successivamente implementata mediante uno schema bottom-up (dal basso verso) l'alto: si costruisce la soluzione del problema originario a partire dalle soluzioni dei sottoproblemi

   Il costo della soluzione del problema è pari al costo della soluzione dei sottoproblemi più il costo imputabile alla scelta effettuata

   se $i < j$:

$$m[i,j] = \min_{i \le k < j} \left\{ m[i,k] + m[k+1,j] + p_{i-1} p_k p_j \right\}$$

   Tipicamente, in questa fase vengono raccolte tutte le informazioni utili per costruire la soluzione ottima

   Matrix-Chain-Order memorizza tali informazioni in $m[i,j]$

Tempo di esecuzione

Informalmente, il tempo di esecuzione di un algoritmo di programmazione dinamica dipende dal prodotto di due fattori:

1. il numero dei sottoproblemi
2. il numero di scelte da considerare per ogni sottoproblema

Nel caso della moltiplicazione di una sequenza di n matrici;

1. il numero complessivo dei sottoproblemi è $\Theta(n^2)$
2. e per ognuno di essi avevamo al massimo $n-1$ scelte

La complessità dell'algoritmo è $\Theta(n^3)$

Ruolo della sottostruttura ottima

Bisogna fare molta attenzione a non assumere la sottostruttura ottima quando non è possibile farlo

Sia $G = (V, A)$ un grafo orientato ed $u, v \in V$ due nodi in G

Cammino minimo in un grafo non pesato: trovare un cammino semplice (senza cicli) da u a v con minimo numero di archi

Cammino massimo in un grafo non pesato: trovare un cammino semplice (senza cicli) da u a v con massimo numero di archi

Questi due problemi sembrano molto simili, ma **solo** il primo presenta una sottostruttura ottima

Cammino minimo e sottostruttura ottima

Sia p un cammino $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ dal vertice u al vertice v con minimo numero di archi

Se $u \neq v$ (cioè se il problema non è banale), allora deve esistere un nodo intermedio w (w può anche essere u o v) tale che il cammino $u \overset{p}{\rightsquigarrow} v$ può essere decomposto nei cammini $u \overset{p_1}{\rightsquigarrow} w$ e $w \overset{p_2}{\rightsquigarrow} v$

Chiaramente il $\#_{\text{archi}}(p) = \#_{\text{archi}}(p_1) + \#_{\text{archi}}(p_2)$

Sottostruttura ottima: se p è un cammino minimo da u a v, allora p_1 e p_2 sono cammini minimi da u a w e da w a v rispettivamente

Di nuovo, dimostriamo la sottostruttura ottima usando la tecnica taglia e incolla

Cammino minimo e sottostruttura ottima

Assumiamo, per assurdo, che il cammino p_1 non sia minimo

Deve esistere un cammino alternativo $u \overset{p_1'}{\rightsquigarrow} w$ t.c. $\#_{\text{archi}}(p_1') < \#_{\text{archi}}(p_1)$

Sostituendo in p p_1 con p_1' otteniamo un cammino da u a v con un numero di archi pari a

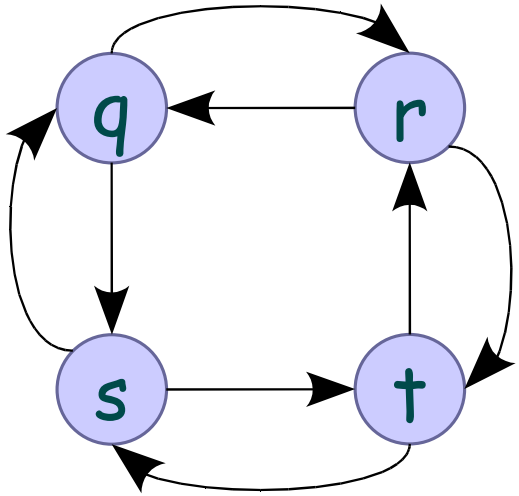
$$\#_{\text{archi}}(p_1') + \#_{\text{archi}}(p_2) < \#_{\text{archi}}(p_1 + \#_{\text{archi}}(p_2) = \#_{\text{archi}}(p)$$

con p cammino minimo – contraddizione

In maniera analoga possiamo dimostrare che anche il cammino p_2 ha un numero di archi minimo

Saremmo tentati di supporre che anche il problema del cammino semplice massimo presenti una sottostruttura ottima

Cammino massimo e sottostruttura ottima

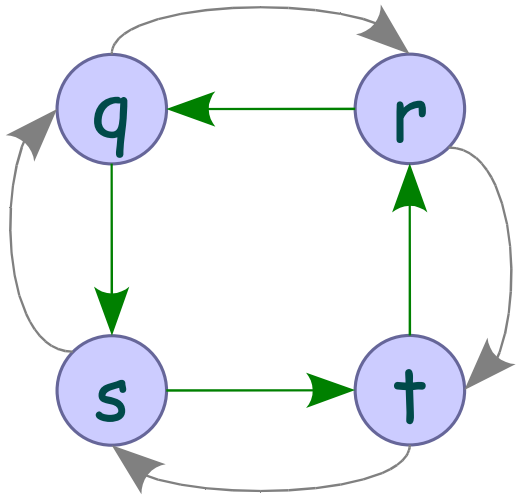


Un cammino semplice massimo tra q ed t è $q \longrightarrow r \longrightarrow t$, ma:

- $q \longrightarrow r$ non è un cammino semplice massimo tra q e r (esiste un cammino semplice tra i due nodi con numero maggiore di archi, $q \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow r$)
- in maniera analoga $r \longrightarrow t$ non è un cammino semplice massimo tra r e t ($r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow t$)

Cammino massimo e sottostruttura ottima

Inoltre ...

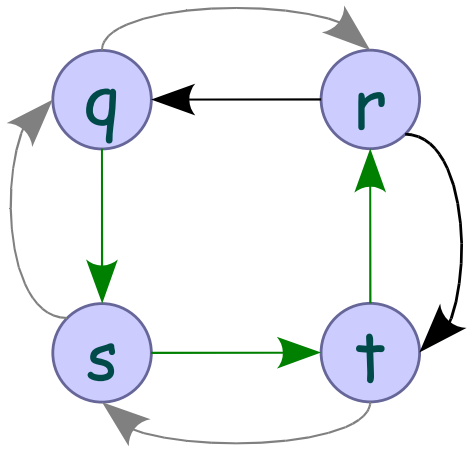


assemblando soluzioni ottime di sottoproblemi, ad es. $q \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow r$ e $r \longrightarrow q \longrightarrow s \longrightarrow t$, non otteniamo una soluzione valida del problema

La combinazione delle due soluzioni da luogo ad un ciclo ed il cammino non è un cammino semplice

Cammino massimo e sottostruttura ottima

I sottoproblemi non sono **indipendenti**: la soluzione di un sottoproblema può influire sulla soluzione di un altro sottoproblema



L'aver usato i vertici s e t per costruire il cammino massimo tra q ed r, ci impedisce di usare questi vertici per costruire il cammino massimo tra r e t (la combinazione delle due soluzioni produrrebbe un cammino non semplice) e quindi di risolvere il problema

Cammino massimo e sottostruttura ottima

Non è stato ancora trovato un algoritmo di programmazione dinamica in grado di risolvere il problema del cammino massimo in un grafo non pesato

In effetti, questo problema è NP-completo ossia è improbabile che possa essere risolto in un tempo polinomiale

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Recursive-Matrix-Chain-Order(p, i, j)

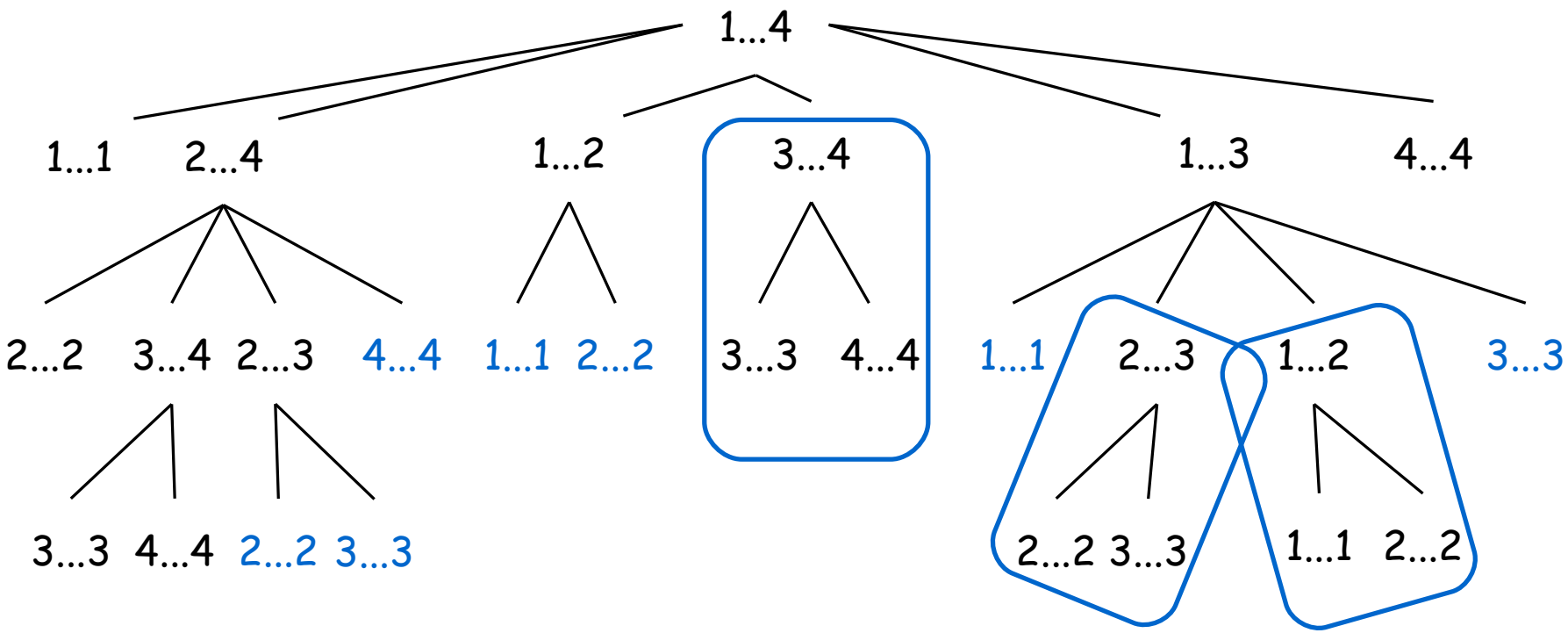
1. **for** $i = j$
2. **then return** 0
3. $m[i, j] = \infty$

4. **for** $k \leftarrow i$ **to** $j - 1$
5. **do** $q \leftarrow$ **Recursive-Matrix-Chain-Order**(p, i, k)
$+$ **Recursive-Matrix-Chain-Order**$(p, k + 1, j)$
$+$ $p_{i-1} p_k p_j$

6. **if** $q < m[i, j]$
7. **then** $m[i, j] \leftarrow q$

8. **return** $m[i, j]$

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza



Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Poichè eseguire le righe 1-2 e 6-7 richiede almeno un'unità di tempo, abbiamo

$$T(1) \geq 1$$
$$T(n) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 1) \quad \text{per } n \geq 1$$

Inoltre:

$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} (T(k) + T(n-k) + 1)$$
$$1 + \sum_{k=1}^{n-1} T(k) + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} T(n-k)}^{\sum_{j=1}^{n-1} T(j)} + \overbrace{\sum_{k=1}^{n-1} 1}^{n-1} =$$
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + (n-1) = 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$$

Sottoproblemi ripetuti ed efficienza

Possiamo riscrivere la ricorrenza come $T(n) \geq 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n$. Dimostriamo per induzione che $T(n) \geq 2^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$ e, quindi, che $T(n) = \Omega(2^n)$

Caso base: $T(1) \geq 1 = 2^0$

Passo induttivo: Assumiamo $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
T(n) &\geq 2\sum_{k=1}^{n-1} T(k) + n && \text{per ip. induttiva} \\
&\geq 2\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + n && \text{ponendo } i = k-1 \\
&= 2\sum_{i=0}^{n-2} 2^i + n = 2\frac{(2^{n-1}-1)}{2-1} + n \\
&= 2^n - 2 + n && \text{poichè } n \geq 2 \\
&\geq 2^n \\
&\geq 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Parte II

La più lunga sottosequenza comune

Definizione del problema

Nelle applicazioni biologiche spesso si confronta il DNA di due, o più, organismi differenti

La struttura del DNA è formata da una stringa di molecole dette **basi**: adenina, citosina, guanina, e timina

La struttura del DNA è rappresentata da una stringa sull'insieme finito $\{A, C, G, T\}$

Il DNA di due organismi

$$S_1 = ACCGGTCGCGCGGAAGCCGGCCGAA$$

$$S_2 = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$

Definizione del problema

Uno degli scopi del confronto tra due molecole di DNA è quello di determinare il grado di somiglianza delle due molecole

Potremmo dire che due molecole si somigliano se, date le stringhe S_1 e S_2 rappresentato le molecole:

- una è sottostringa di un'altra
- il numero delle modifiche richieste per trasformare l'una nell'altra è piccolo
- trovare una terza stringa S_3 le cui basi si trovano in ciascuna delle stringhe S_1 ed S_2: le basi devono presentarsi nello stesso ordine, senza essere necessariamente consecutive

Definizione del problema

Ad esempio, date le stringhe:

$$S_1 = ACCGGTCGAGTGCGCGGAAGCCGGCCGAA$$

$$S_2 = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$

la stringa S_3 è:

$$S_3 = GTCGTCGGAAGCCGGCCGAA$$

Formalizziamo questo concetto

Definizione del problema

Siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ due sequenze; diciamo che Z è una **sottosequenza** di X se esiste una sequenza crescente $i_1, i_2, \cdots, i_k$ di indici di X tali che $x_{i_j} = z_j$ per ogni $j = 1, 2, \cdots, k$

Ad esempio, se $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Z = \langle B, C, D, B \rangle$ la sequenza di indici è: $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$

Definizione del problema

Date due sequenza X e Y diciamo che Z è una **sottosequenza comune** di X e Y se è una sottosequenza sia di X che di Y

Ad esempio, se $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$ la sequenza $\langle B, C, A \rangle$ è una sottosequenza di X eY, ma non è la più lunga sottosequenza comune (Longest Common Subsequence, LCS)

Sottosequenze comuni più lunghe: $\langle B, C, B, A \rangle$ e $\langle B, D, A, B \rangle$

Date due sequenze $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ ed $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ trovare una sottosequenza di lunghezza massima che è comune sia a X che a Y

Fase 1: struttura della soluzione ottima

In questo caso, applicare la "forza bruta" significa considerare tutte le possibili sottosequenze di X e confrontarle con tutte le sottosequenze di Y

Quante sono le possibili sottosequenze di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$?

Ogni sottosequenza di X corrisponde ad un sottoinsieme degli indici $\{1, 2, \cdots, m\}$ e tutti i possibili sottoinsiemi di $\{1, 2, \cdots, m\}$ sono 2^m

Il solo enumerare tutte le possibili sottosequenze di X richiede un tempo esponenziale

Di nuovo, la tecnica della forza bruta non è adeguata

Fase 1: struttura della soluzione ottima

Dimostriamo che il problema della LCS soddisfa la sottostruttura ottima

Nel seguito definiremo classi di sottoproblemi corrispondenti a coppie di prefissi delle sequenze in input

Sia $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $i = 1, ..., m$; l'i-esimo prefisso di X è definito come $X_i = \langle x_1, x_2, \cdots, x_i \rangle$ ($X = X_m$ e X_0 è la sequenza vuota $\langle\rangle$)

Siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ le due sequenze input e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ una LCS di X e Y. Quale è la struttura di Z??

Caso banale: almeno una delle due sequenze è vuota (ossia, $X = \langle\rangle$ or $Y = \langle\rangle$). In questo caso, X e Y possono avere una solo sottosequenza comune, la sottosequenza vuota e quindi $Z = \langle\rangle$

Fase 1: struttura della soluzione ottima

Caso non banale: X che Y sono sequenze non vuote; in questo caso usiamo il seguente teorema:

Teorema 1 (*sottostruttura ottima di LCS*): siano $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$, $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ e $Z = \langle z_1, z_2, \cdots, z_k \rangle$ una qualsiasi LCS di X e Y. Allora:

1. se $x_m = y_n$, allora $z_k = x_m = y_n$ e Z_{k-1} è una LCS di X_{m-1} e Y_{n-1}
2. se $x_m \neq y_n$, allora $z_k \neq x_m$ implica che Z è una LCS di X_{m-1} e Y
3. se $x_m \neq y_n$, allora $z_k \neq y_n$ implica che Z è una LCS di X e Y_{n-1}

L'idea è la seguente

Per trovare una LCS di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$ distinguiamo due casi:

1. $x_m = y_n$: troviamo una LCS di X_{m-1} e Y_{n-1} e accodiamo x_m come ultimo simbolo
2. $x_m \neq y_n$:
   - troviamo una LCS di X_{m-1} e Y
   - troviamo una LCS di X e Y_{n-1}

   La più lunga di queste sequenze è una LCS di X e Y

la proprietà della sottostruttura ottima è verificata perchè una soluzione ottima contiene al suo interno soluzioni ottime di sottoproblemi

L'idea è la seguente

La sottostruttuta ottima di consente di risolvere il problema originario, identificare una LCS di $X = \langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \cdots, y_n \rangle$, cercando LCS di coppie di prefissi di X e Y

Quanti sottoproblemi dobbiamo risolvere? Tutti quelli della forma:

$$trovare\ una\ LCS\ di\ X_i\ e\ Y_j\ con\ i = 1 \cdots m\ e\ j = 1 \cdots n$$

In totale sono nm sottoproblemi distinti

Fase 2: una soluzione ricorsiva

Sia $c[i,j]$ la lunghezza di una LCS tra X_i e Y_j:

- se $i = 0$ o $j = 0$ (almeno una delle due è vuota) $c[i,j] = 0$
- se $i,j > 0$ e $x_i = y_j$, $c[i,j] = c[i-1,j-1] + 1$
- se $i,j > 0$ e $x_i \neq y_j$, $c[i,j] = \max(c[i-1,j], c[i,j-1])$

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 0 \text{ oppure } j = 0 \\ c[i,j] = c[i-1,j-1] + 1 & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i = y_j \\ \max(c[i-1,j], c[i,j-1]) & \text{se } i,j > 0 \text{ e } x_i \neq y_j \end{cases}$$

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

Esempio: calcolare la lunghezza di una LCS di $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0						
B	2	0						
C	3	0						
B	4	0						
D	5	0						
A	6	0						
B	7	0						

$c[i, 0] = c[0, j] = 0$ per ogni $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

Se $i, j \neq 0$ distinguiamo due casi:

- $x_i = y_j$. Per calcolare $c[i, j]$ abbiamo bisogno di $c[i-1, j-1]$ (posizione in alto e a sinistra)
- $x_i \neq y_j$. Per calcolarec $c[i, j]$ abbiamo bisogno di $c[i-1, j]$ (a sinistra) e $c[i, j-1]$ (in alto)

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0						
B	2	0						
C	3	0		$\nwarrow$	$\uparrow$			
B	4	0		$\leftarrow$	i, j			
D	5	0						
A	6	0						
B	7	0						

Ci basta riempire la matrice riga per riga

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0						

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0					

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0				

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0			

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1		

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0						

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1					

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1				

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1			

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1		

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0						

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1					

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1				

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2			

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2		

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2

Fase 3: calcolare la lunghezza di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	4
B	7	0	1	2	2	3	4	4

La lunghezza di una LCS tra X e Y è data da $c[n, m]$

L'algoritmo per il calcolo della lunghezza di una LCS

LcsLength(X, Y)

1. $m \leftarrow length[X]$
2. $n \leftarrow length[Y]$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m **do** $c[i, 0] \leftarrow 0$
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do** $c[0, j] \leftarrow 0$
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m
6. **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
7. **do if** $x_i = y_j$
8. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
9. **else if** $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
10. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
11. **else** $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
12. **return** c

Il calcolo di ogni posizione della tabella richiede un tempo costante; allora il costo di esecuzione della procedura è $O(nm)$

Fase 4: costruzione di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	1	1	1	1	2	2
C	3	0	1	1	2	2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	3	3
D	5	0	1	2	2	2	3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	4
B	7	0	1	2	2	3	4	4

Possiamo riesaminare le scelte fatte per calcolare la lunghezza di una LCS al contrario, ossia dall'ultima alla prima, per costruire una soluzione ottima

Fase 4: costruzione di una LCS

			B	D	C	A	B	A
		0	1	2	3	4	5	6
	0		0	0	0	0	0	0
A	1	0	0	0	0	1	1	1
B	2	0	**1**	← 4	1	1	2	2
C	3	0	1	1	**2**	← 2	2	2
B	4	0	1	1	2	2	**3**	3
D	5	0	1	2	2	2	↑ 3	3
A	6	0	1	2	2	3	3	**4**
B	7	0	1	2	2	3	4	↑ 4

L'algoritmo per il calcolo della lunghezza di una LCS

LcsLength(X, Y)

1. $m \leftarrow length[X]$
2. $n \leftarrow length[Y]$
3. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m **do** $c[i, 0] \leftarrow 0$
4. **for** $j \leftarrow 1$ **to** n **do** $c[0, j] \leftarrow 0$
5. **for** $i \leftarrow 1$ **to** m
6. **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
7. **do if** $x_i = y_j$
8. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j-1] + 1$
9. $b[i, j] \leftarrow$ "$\nwarrow$"
10. **else if** $c[i-1, j] \geq c[i, j-1]$
11. **then** $c[i, j] \leftarrow c[i-1, j]$
12. $b[i, j] \leftarrow$ "$\uparrow$"
13. **else** $c[i, j] \leftarrow c[i, j-1]$
14. $b[i, j] \leftarrow$ "$\leftarrow$"
15. **return** b e c

L'algoritmo per la costruzione di una LCS

PrintLCS(b, X, i, j)

1. **if** $i = 0$ or $j = 0$ **then return**
2. **if** $b[i, j] =$ "$\nwarrow$"
3. **then PrintLCS**$(b, X, i-1, j-1)$
4. stampa x_i
5. **else if** $b[i, j] =$ "$\uparrow$"
6. **then PrintLCS**$(b, X, i-1, j)$
7. **else PrintLCS**$(b, X, i, j-1)$

La chiamata iniziale è **PrintLCS**$(b, X, length[X], length[Y])$

La procedura impiega $O(n+m)$, poichè almeno una delle due dimensioni coinvolte diminuisce ad ogni passo della ricorsione